ELEMENTARMATHEMATIK
HERAUSGEGEBEN VON K. FLADT

BAND I

ELEMENTARGEOMETRIE

2. TEIL: DER STOFF BIS ZUR UNTERSEKUNDA

(PLANIMETRIE UND STEREOMETRIE)

VON

KUNO FLADT

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

ELEMENTARMATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON DR. K. FLADT

BAND I

ELEMENTARGEOMETRIE

2. TEIL: DER STOFF BIS ZUR UNTERSEKUNDA

(PLANIMETRIE UND STEREOMETRIE)

VON

DR. KUNO FLADT

STUDIENRAT AN DER FRIEDRICH-EUGENS-OBERREALSCHULE
IN STUTTGART

MIT 134 FIGUREN IM TEXT

1 9 2 8

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

ISBN 978-3-663-15464-8 ISBN 978-3-663-16035-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-16035-9
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1928

Vorwort.

Es fehlt in der mathematischen Literatur ein Werk, das dem Lehrer' insbesondere dem jüngeren, den elementarmathematischen, d. h· den heute in den höheren Schulen Deutschlands behandelten mathematischen Lehrstoff in wissenschaftlich einwandfreier und zugleich didaktisch verarbeiteter Form darbietet, und dazu die angewandte Mathematik nach ihrem allgemeinen Verfahren und ihrer Anwendung auf die verschiedenen Gebiete ausführlich und gleichmäßig berücksichtigt. In unserer an Pflichtstunden und Korrekturen reichen Zeit wird es nicht jedem Fachgenossen möglich sein, die Fortschritte der mathematischen Wissenschaft und ihrer Anwendungen zu verfolgen und sie zugleich für den Unterricht nutzbar zu machen. Hier will die „*Elementarmathematik*" helfend eingreifen, über deren drei, wieder in Teile von mäßigem Umfang zerlegte Bände die Ankündigung am Ende des Buches näheren Aufschluß gibt. Danach handelt es sich also nicht um eine Methodik des mathematischen Unterrichts, welche den Stoff nur als ein Problem neben anderen behandeln kann; im Gegensatz zu den Werken ähnlicher Richtung von Weber-Wellstein, Klein, Netto-Färber-Thieme u. a. steht aber die Didaktik des eigentlichen Schullehrstoffs im Vordergrund. Ergänzt wird diese „*Elementarmathematik*" durch eine ihr im Aufbau genau entsprechende Sammlung von „*Quellenheften*", die aus den Originalwerken eine Auswahl der wichtigsten Belege für solche Dinge der reinen und angewandten Mathematik mit den nötigen Erläuterungen bringen soll, die im heutigen Unterricht noch lebendig sind oder erst lebendig werden sollen. Zunächst erscheinen von der „*Elementarmathematik*" die zwei ersten Teile der „*Elementargeometrie*"[1]), denen die entsprechenden der „*Elementaranalysis*" bald folgen sollen. —

Die Methodik der Geometrie hat sich im Laufe der letzten fünfzig Jahre gründlich geändert. Hat man einst den Bildungswert des geometrischen Unterrichts in seiner formal-logischen Seite gesehen und daher schon von Tertianern als Hauptleistung das Verständnis geometrischer Beweise (auch für Sätze, die unmittelbar einleuchten) verlangt, so ist man heute von der Unausführbarkeit dieser Forderung überzeugt,

1) Das Wort *Elementargeometrie* bezeichne entsprechend dem Wort *Elementarmathematik* den Begriff derjenigen Teile der Geometrie, die den heutigen Inhalt des geometrischen Schulunterrichts in Deutschland bilden, also nicht bloß Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie, sondern auch darstellende und analytische Geometrie.

ohne darum unglücklich zu sein. Denn der Hauptbildungswert der Geometrie liegt in der Weckung und Ausbildung der Anschauung und der schöpferischen Vorstellungskraft. Dazu kommt der stoffliche Bildungswert, der Nutzen der Geometrie für die Wirklichkeit. Daher sollen die geometrischen Aufgaben weithin in wirklichkeitsnahen Anwendungen bestehen.

Trotzdem soll die logische Seite im Unterricht nicht zu kurz kommen. Nur soll sie erst ganz allmählich an den Schüler herangebracht werden. Aber selbst wenn man vom Schüler schon frühe logisches Verständnis der Geometrie verlangen würde, so wäre es doch ganz anderer Art als das vor fünfzig Jahren geforderte. Denn die wissenschaftliche Durchforschung der Grundlagen der Geometrie hat zu einer ganz anderen Einstellung in bezug auf die Logik in der Geometrie geführt, als sie in Nachahmung Euklids die Mehrzahl der Schulbücher bis weit ins 19. Jahrhundert hinein hatte. Wieviel methodische Arbeit in bezug auf die Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie — ich erinnere nur an die Parallelenfrage —, geleistet von einer Reihe der tüchtigsten Schulmänner des 19. Jahrhunderts, hat sich als wissenschaftlich nicht einwandfrei und darum als unnötige Kraftverschwendung erwiesen! Es ist darum Zeit, daß auch die Schulbücher sich die Ergebnisse der wissenschaftlichen Forschung zunutze machen. Gewiß hat der Lehrer nicht wie einst die Aufgabe, seinen Untertertianern gegenüber die Gültigkeit der Geometrie zu rechtfertigen. Gleichwohl kann und soll er seinen Unterricht so einrichten, daß dieser trotz aller Zugeständnisse an die Anschauung wissenschaftlich „in Ordnung" ist.[1])

Der vorliegende zweite Teil der „*Elementargeometrie*" sucht gerade die Grundlagenforschung der letzten fünfzig Jahre für den Unterricht nutzbar zu machen und so eine Aufgabe der Lösung näherzubringen, die sich dem Verfasser immer wieder aufgedrängt hat. Er umfaßt einerseits den Lehrgang, wie er sich dem Verfasser in seiner Unterrichtstätigkeit herauskristallisiert hat. Andererseits verknüpft er mit diesem eine wissenschaftliche Darstellung der Hauptprobleme der Elementargeometrie der Unterstufe.

Daraus, daß die Logik nur allmählich in den Lehrgang eingeführt werden kann, ergibt sich, daß Lehrgang und wissenschaftliche Darstellung besonders in den Anfangsabschnitten getrennt verlaufen müssen. Diese soll dem Lehrer zeigen, was an Voraussetzungen und Ergänzungen

---

1) Vgl. die Vorrede zu Veronese, Grundzüge der Geometrie, Leipzig 1894. S. XXXV: „Das wissenschaftliche und das didaktische Problem werden [häufig] von verschiedenen Gesichtspunkten aus behandelt; die beste Lösung des zweiten hängt aber von derjenigen des ersten ab; denn, wenn auch die didaktischen Anforderungen ihren gebührenden Einfluß haben müssen, so will es doch in einer wissenschaftlich vorher festgestellten Anordnung gelöst werden, während das wissenschaftliche Problem derart bearbeitet werden muß, daß es bei der Lösung des andern möglichst behilflich ist."

zum Schullehrgang hinzukommen muß, damit er ein wissenschaftlicher Lehrgang werde. Sie enthält dabei jeweils nur das Notwendige und verweist das Übrige auf die späteren Teile, um so mehr, als vieles von beidem auch in der Schule, doch erst auf der Oberstufe, zur Sprache kommen wird. Die wissenschaftliche Darstellung ist ziemlich ausführlich gehalten, der Lehrgang dagegen ganz kurz und bündig, aber doch so, daß er jedem verständlich ist, der sich von einer höheren Warte aus einen Überblick über Wesen und Aufbau der Elementargeometrie verschaffen möchte. Nebenbei mag der Lehrgang auch zeigen, daß sich vieles in der Elementargeometrie heute einfacher darstellen läßt, als manche durch Jahrzehnte weitergeschleppte, umständliche Entwicklungen der Schullehrbücher vermuten lassen.

Der Lehrgang setzt einen mindestens einjährigen vorwissenschaftlichen (nicht unwissenschaftlichen) geometrischen Vorbereitungsunterricht voraus, wie er etwa für die Quarta (Klasse III) vorgesehen ist, in dem die Schüler mit den wichtigsten geometrischen Gestalten bekannt gemacht und im Gebrauch der Zeichenwerkzeuge geübt worden sind.

Im ersten Teil dieser „*Elementargeometrie*“ wird Herr Dr. Schumacher, Wetzlar, einen methodischen Lehrgang eines solchen Vorbereitungsunterrichts darstellen. Er wird da im Sinne der preußischen Richtlinien absichtlich etwas ausführlicher zu Werke gehen. Denn der Zeitpunkt des Übergangs vom Vorbereitungsunterricht zum „wissenschaftlichen“ Geometrieunterricht ist streng gar nicht festzustellen. Dieser Übergang vollzieht sich überhaupt nicht zu einem bestimmten Zeitpunkt. Er bildet vielmehr eine mehr oder weniger breite Grenzschicht, in der die anschauliche Behandlung der Geometrie ganz allmählich in die logische übergeht. Der Lehrgang des ersten Teils und der im gegenwärtigen zweiten Teil gegebene werden sich in der Weise ergänzen, daß für jenen die Anschauung, für diesen die Logik das Hauptproblem ist, daß also dort die Grenzschicht den Abschluß, hier den Anfang des Lehrgangs bildet.

Dem Verfasser lag es am nächsten, für den Lehrgang etwa von der Stoffverteilung auszugehen, wie sie seit 1912 bei den württembergischen Oberrealschulen besteht und durch die Lehrplanreform von 1926/27 nirgends wesentlich geändert ist. Er ist wie der preußische ein Maximallehrgang, stimmt weitgehend mit diesem sowie den übrigen Lehrplänen im Reiche überein und gestattet für die verschiedenen Schulgattungen unschwer die Umstellung und Ausscheidung beliebig vieler Teile. Wegen aller Einzelheiten sei auf das ausführliche Inhaltsverzeichnis verwiesen. Nur folgende Bemerkungen seien noch hinzugefügt:

Der Lehrgang betont nachdrücklich die geometrischen Verwandtschaften und damit die funktionalen Zusammenhänge in der Geometrie (vgl. dazu Kap. I, § 6). Es lag ferner nicht in der Absicht des Verfassers, auch die geometrischen Aufgaben einer kritischen Durchsicht zu unterziehen. Die in den Lehrgang eingefügten

Aufgaben sind nach seinem persönlichen Geschmack ausgewählt. „Angewandte" Aufgaben sind nicht um ihrer selbst willen behandelt. Dies konnte um so eher unterbleiben, als Band III dieser „*Elementarmathematik*" ausführlich auf Einzelaufgaben, Aufgabengruppen oder ganze Aufgabengebiete der angewandten Geometrie eingehen wird. Übrigens wäre eine Sammlung der „rein theoretischen", nicht bloß didaktisch brauchbaren, sondern auch wissenschaftlich interessanten und weiterführenden unter den Geometrieaufgaben, etwa in der Art von Schwerings „100 Aufgaben" ein dankenswertes Unternehmen, damit hier einmal die Spreu vom Weizen gesondert würde.

Lehrplanmäßig gehört zur Unterstufe auch noch ein einführender Abschnitt in die ebene Trigonometrie. Aus Gründen der Systematik ist er auf den dritten Teil verschoben. Dafür werden einige der Oberstufe angehörige Reste der Stereometrie hier schon behandelt, so daß der vorliegende Teil die ganze Planimetrie und Stereometrie umfaßt.

Den Schluß bildet ein Kapitel über die elementargeometrische Literatur, soweit sie für die Unterstufe in Betracht kommt. Der Leser soll dabei auf eine Reihe besonders wertvoller, namentlich älterer Darstellungen der Elementargeometrie hingewiesen werden. Im übrigen streben wissenschaftliche Darstellung und Lehrgang in erster Linie danach, den Zusammenhang zwischen Schule und Hochschule zu wahren und damit die noch immer bestehende Kluft zwischen beiden in ihrem Teile auszufüllen. So kann vielleicht das vorliegende Buch den Zugang zu den Ergebnissen der Wissenschaft und ihre Verarbeitung für den Unterricht erleichtern und zugleich dem Liebhaber der Mathematik zeigen, wie heute das Gebäude der elementaren Planimetrie und Stereometrie aussieht.

Stuttgart-Vaihingen a. F., 1. Januar 1928.

K. Fladt.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie.

§ 1. Die Axiomatik der Geometrie.

1. Wir haben in diesem Kapitel zunächst von Dingen zu reden, die in dem in Untertertia einsetzenden wissenschaftlichen[1]) Geometrieunterricht noch nicht zur Sprache kommen können. Um so mehr muß der Lehrer darüber Bescheid wissen. Und auch derjenige, der in einem Rückblick sich ein klares Bild vom Wesen und Aufbau der Elementargeometrie machen will, muß darüber Klarheit haben.

Es handelt sich um die Grundlagen der Geometrie. Was man der Mathematik gegenüber allen anderen Wissenschaften nachrühmt, ist, daß ihre Sätze und Behauptungen beweisbar sind. Das bedeutet, daß man irgendeinen mathematischen Satz *logisch* aus anderen, früheren Sätzen herleiten kann, wozu noch kommt, daß auch die in jenem Satz vorkommenden Begriffe logisch aus anderen, früheren Begriffen gewonnen werden können. Und jene früheren Sätze und Begriffe beziehen sich auf noch weiter zurückliegende. Da man aber diesen Rückgang nicht unendlich oft ausführen kann, so muß man einmal an Begriffe kommen, die man nicht weiter logisch erklären kann, *Grundbegriffe*, und an Sätze, die man nicht weiter logisch beweisen kann, *Grundsätze*.

2. Das gilt besonders von der Geometrie, und das Verdienst, erstmals ein *System der Geometrie*, d. h. die Begriffe und Sätze der Geometrie in einer logischen Kette dargestellt zu haben, gebührt dem großen Alexandriner EUKLID (um 325 v. Chr.).[2]) Seine *Elemente* galten über zwei Jahrtausende als das unerreichte Muster einer wissenschaftlichen Darstellung. Erst das 19. Jahrhundert hat gezeigt, daß Euklid noch lange nicht den Gipfel logischer Strenge bedeutet. Seine Grundsätze, die *Axiome* und *Postulate*[3]), sind keineswegs vollständig, d. h. er entnimmt während des Aufbaues der Geometrie stillschweigend noch manches der Anschauung,

---

1) Wir setzen einen mindestens einjährigen *vor*wissenschaftlichen (nicht *un*wissenschaftlichen) geometrischen Vorbereitungsunterricht voraus, in dem die Schüler mit den wichtigsten geometrischen Gestalten bekannt gemacht und im Gebrauch der Zeichenwerkzeuge geübt sind.

2) Ausführlicher behandelt ihn und sein Werk K. Fladt, Euklid, Ma-Na-Te-Bücherei Nr. 8, Berlin 1927.

3) Vgl. den Anhang.

was er als Grundsatz hätte fassen müssen. Er versucht ferner, die Grundbegriffe selbst zu definieren.[1] Diese Definitionen braucht er aber später nirgends als Beweismittel. Nirgends heißt es z. B. in einem Beweis: „Weil der Punkt etwas ist, dessen Teil nichts ist, so . . .“ Das zeigt, daß jene *Definitionen* für den Aufbau der Geometrie ganz und gar unnötig sind und daß man sich, bis in die neueste Zeit hinein, unnötig abgequält hat, für die Grundbegriffe der Geometrie einwandfreie logische Definitionen zu gewinnen. Die Grundbegriffe der Geometrie lassen sich nicht logisch definieren, „keine Erklärung ist imstande, dasjenige Mittel zu ersetzen, welches allein das Verständnis jener einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschließt, nämlich den Hinweis auf geeignete Naturgegenstände“.[2] Für den Aufbau der Geometrie sind also nicht die Definitionen der Grundbegriffe, sondern nur die Grundsätze, d. h. die Grundbeziehungen zwischen den Grundbegriffen wesentlich.[3])

3. Dabei fragt sich aber immer noch, welche geometrischen Begriffe man als unerklärbare Begriffe, *Grundbegriffe*, welche geometrischen Sätze man als unbeweisbare Sätze, *Grundsätze*, annehmen soll. Die Auswahl ist durchaus nicht eindeutig. Die Sätze der Geometrie lassen sich nicht nur auf eine einzige Art in einer logischen Reihe anordnen, sie gleichen vielmehr den Knotenpunkten eines Netzes, zwischen denen mannigfache Fäden hin- und herlaufen. Und die Ausgangsknotenpunkte, die den Grundsätzen entsprechen, sind durchaus nicht eindeutig bestimmt. Im Laufe der letzten fünfzig Jahre sind vielmehr eine ganze Reihe von *Axiomensystemen*[4] aufgestellt worden, die jeweils verschiedene geometrische Begriffe als Grundbegriffe benützen und alle gleich berechtigt sind. Jedes von ihnen hat seine besonderen Vorzüge. Doch zeigt es sich, daß die einzelnen Axiome sich in gewisse Gruppen zusammenfassen lassen. Der Unterschied der einzelnen Axiomensysteme besteht dann in der Freiheit, mit der man die Axiome zu Gruppen zusammenfassen kann, und in der verschiedenen Reihenfolge der Axiomgruppen.

4. Aber, wie man auch die Axiome und ihre Gruppen auswählen mag, immer müssen sie vier Bedingungen erfüllen, drei logische und eine psychologische: (1) Sie müssen *widerspruchslos* sein und diese Widerspruchslosigkeit muß bewiesen werden. (2) Sie müssen voneinander *unabhängig* sein: keines von ihnen darf aus den früheren erschließbar sein. (3) Sie

---

1) Vgl. den Anhang.

2) Pasch-Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie, 2. Aufl., Berlin 1926, S. 15.

3) Das hat zur Folge, daß, wenn man z. B. die Grundbegriffe Punkt, Gerade, Ebene durch die Begriffe Punkt, Kreis durch den festen Punkt O, Kugel durch den festen Punkt O ersetzt, die ebenfalls die Grundsätze erfüllen, man mit einem Schlag eine ganze Geometrie dieser neuen Begriffe erhält (vgl. Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, 2. Bd., Leipzig 1907, S. 33ff.).

4) Im Gegensatz zu Euklid gebrauchen wir die Ausdrücke *Grundsatz*, *Axiom* und *Postulat* durchaus synonym.

müssen *vollzählig* sein: man muß die ganze Geometrie aus ihnen logisch ableiten können. (4) Sie müssen einfache Tatsachen der Anschauung beschreiben.

Auf eine nähere Erörterung und Prüfung dieser Bedingungen einzugehen, ist erst im zweiten und dritten Heft dieser Elementargeometrie der richtige Ort. Nur folgendes sei bemerkt: Die drei ersten Bedingungen sind durchaus *logischer* Natur. So scheint in der Geometrie die Logik den Ausschlag zu geben, die Geometrie in erster Linie ein logisches Problem zu sein. Daß dem nicht so ist, zeigt schon die Bedingung (4). Sie weist darauf hin, daß die Axiome nicht logischen Ursprungs sind, daß ohne Anschauung keine Geometrie vorhanden wäre. Freilich nicht die mit Fehlern behaftete Sinneswahrnehmung können wir der Geometrie zugrunde legen. Nach Felix Klein (1848—1926)[1]) setzen wir vielmehr durch die Axiome an die Stelle von stets ungenauen Tatsachen der Anschauung Aussagen von unbedingter Genauigkeit und Allgemeinheit, wir idealisieren die Ergebnisse von Beobachtungen.

Aber auch beim weiteren Aufbau der Geometrie sind nicht etwa die Axiome die einzige Quelle, wie man aus der dritten an sie gestellten Bedingung irrtümlicherweise folgern könnte. Die Voraussetzungen und Konstruktionen der Geometrie entspringen vielmehr ganz der freien Wahl der von der Anschauung befruchteten Einbildungskraft. Die Logik sorgt nur dafür, daß sie zu den Axiomen in keinem Widerspruch stehen, „logisch aus ihnen ableitbar sind". So stellt überhaupt die Logik nur die mathematische Schutzpolizei dar, nicht die mathematische Schöpferkraft, sonst wäre ja die ganze Mathematik eine einzige große Tautologie.

§ 2. Die graphischen Axiome.

1. Man kann die Axiome zunächst in zwei Gruppen teilen: die Axiome der Lagebeziehungen und die der Maßbeziehungen. Die Axiome der Lagebeziehungen, Axiome der Lage oder *graphischen Axiome*, dienen demjenigen Teil der Geometrie als Grundlage, der die Lagebeziehungen zwischen den drei geometrischen Gebilden Punkt, Gerade und Ebene zum Gegenstand hat. Er enthält lauter Tatsachen, die der geometrische Unterricht zunächst vollständig und jeweils da, wo er sie gerade braucht, aus der Anschauung entnehmen wird. Er liegt stillschweigend dem ganzen planimetrischen Lehrgang und dem stereometrischen Lehrgang der Untersekunda zugrunde. Aber es ist Pflicht wenigstens des Lehrers, über den axiomatischen Aufbau dieses Teils im klaren zu sein, um so mehr, als eine Reihe wertvoller Schullehrbücher der Elementargeometrie des 19. Jahrhunderts ehrlich, aber, weil unbekannt mit den Forschungsergebnissen, erfolglos mit ihm gerungen haben. Darum soll er hier eine Stelle finden.

---

1) F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, 1. Bd., Berlin 1921, S. 385.