Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1262

E. Hlawka (Hrsg.)

Zahlentheoretische Analysis II

Wiener Seminarberichte 1984–86

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Herausgeber

Edmund Hlawka
Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstrasse 8–10, 1040 Wien, Austria

Mathematics Subject Classification (1980): 11K05; 05A15, 65-XX, 69-XX

ISBN 3-540-18015-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-18015-X Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987
Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

V O R W O R T

Der vorliegende Band ist eine Fortsetzung des Bandes Lecture Notes in Mathematics 1114 - Zahlentheoretische Analysis (Wiener Seminarberichte). Er enthält wieder Vorträge, die von Angehörigen verschiedener mathematischer Institute im Zeitraum 1984 - 86 in Wien gehalten wurden. Im Vorwort zum 1. Band wurde über die Vorgeschichte berichtet, die zur Errichtung dieses Seminars führte und bis zu Hans Hahn zurückreicht; damals allerdings führte das Seminar noch nicht diesen Titel. Um auch diesen Band nicht zu umfangreich zu gestalten, konnten leider nicht alle Vorträge aufgenommen werden. Wir hoffen, daß die Leser auch dieser Vorträge bei der Lektüre dieselbe Freude haben, wie es damals bei den Hörern der Vorträge der Fall war. Für das Zustandekommen der neuen und für die Veröffentlichung geeigneten Fassungen dieser Vorträge danke ich allen Vortragenden und Herrn Doz. R. Tichy, der die Koordination durchgeführt hat. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. B. Eckmann von der ETH-Zürich, der sich in liebenswürdiger Weise bereit erklärt hat, auch diese Vorträge in die Lecture Notes aufzunehmen.

Wien 1987 Edmund Hlawka

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

G. Baron: EIN LINEARES PROGRAMM IN DER ZAHLENTHEORIE 1

M. Blümlinger, M. Drmota, R.F. Tichy: METRISCHE SÄTZE DER C-GLEICHVERTEILUNG AUF DER SPÄHRE 14

M. Drmota: GLEICHMÄSSIG GLEICHVERTEILTE UND SCHWACH GLEICHMÄSSIG GLEICHVERTEILTE FUNKTIONEN MODULO 1 22

M. Goldstern: EINE KLASSE VOLLSTÄNDIG GLEICHVERTEILTER FOLGEN 37

M. Goldstern: VOLLSTÄNDIGE GLEICHVERTEILUNG IN DISKRETEN RÄUMEN ... 46

E. Hlawka: ÜBER DIE DIREKTEN METHODEN DER VARIATIONSRECHNUNG UND GLEICHVERTEILUNG 50

P. Kirschenhofer: ASYMPTOTISCHE UNTERSUCHUNGEN ZUR DURCHSCHNITTLICHEN GESTALT GEWISSER GRAPHENKLASSEN II.. 86

P. Kirschenhofer, H. Prodinger: ASYMPTOTISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER CHARAKTERISTISCHE PARAMETER VON SUCHBÄUMEN 93

P. Kirschenhofer, H. Prodinger, J. Schoißengeier: ZUR AUSWERTUNG GEWISSER NUMERISCHER REIHEN MIT HILFE MODULARER FUNKTIONEN ... 108

P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R.F. Tichy: ÜBER EINIGE FUNKTIONAL-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUS DER ANALYSE VON ALGORITHMEN.. 111

H. Prodinger: ÜBER LÄNGSTE 1-TEILFOLGEN IN 0-1-FOLGEN 124

J. Schoißengeier: EINE EXPLIZITE FORMEL FÜR $\sum_{n \leq N} B_2(\{n\alpha\})$ 134

R.F. Tichy: EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER STETIGE FUNKTIONEN AUF TOPOLOGISCHEN GRUPPEN 139

G. Turnwald: EINIGE BEMERKUNGEN ZUR DISKRETEN GLEICHVERTEILUNG 144

F. Vogl: ÜBER DAS CAUCHYSCHE ANFANGSWERTPROBLEM FÜR EINE KLASSE LINEARER PARTIELLER FUNKTIONAL-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ... 150

EIN LINEARES PROGRAMM IN DER ZAHLENTHEORIE

G.Baron

Abstract. A problem of ERDÖS to determine $c_m=\sup\{\frac{1}{n}\Sigma a_i: \frac{n!}{\Pi a_i!} \in \mathbb{N}, a_i \geq m\}$ is treated by linear programming. Also the similar problems using $L^n n!$ resp. $(n)_q!$ instead of $n!$ leading to c_{Lm} resp. $c_m^{(q)}$ are considered and the asymptotic behaviour of c_m and c_{Lm} is determined.

Ein zahlentheoretisches Problem von Erdös [1] konnte in [2] auf ein lineares Programm zurückgeführt werden und damit im Prinzip gelöst werden. Das Problem selbst und neuere Ergebnisse werden in § 2 vorgestellt. In den § 3-5 werden verwandte Probleme mit der in § 1 dargelegten Verallgemeinerung der Lösungsmethode behandelt. Bei den Aussagen über das asymptotische Verhalten wird die LANDAU-Symbolik verwendet:

$f(n)=O(g(n))$ heißt $\overline{\lim}\ \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$,

$f(n)=\Omega(g(n))$ heißt $\underline{\lim}\ \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$ also $g(n)=O(f(n))$,

$f(n)=\Theta(g(n))$ heißt $f(n)=O(g(n))$ und $f(n)=\Omega(g(n))$,

$f(n)=o(g(n))$ heißt $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 0$,

$f(n) \sim g(n)$ heißt $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

§ 1 TEILBARKEITSPROBLEME UND LINEARE PROGRAMME

Sei in einem Integritätsbereich R die Relation "teilt" $(x|y)$ definiert durch die Existenz eines $z \in R$ mit $y = xz$.

Ist nun eine Funktion $f : \mathbb{N} \to R$ auf der Menge der natürlichen Zahlen definiert, so kann man das
Problem(C): Bei vorgegebenen m und n Bestimmung von

$$c_m(n)=\sup\{\frac{1}{n}\ \Sigma j\ y_j : \prod_{j\geq m} f(j)^{y_j} | f(n)\}$$

und des Verhaltens von $c_m(n)$ für n gegen unendlich betrachten.

Wir wollen an die Funktion f folgende Bedingungen stellen:

(B1) Es gibt abzählbar viele Nichteinheiten $g_i \in R$ (nicht notwendig Primelemente), sodaß für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(n)=\Pi g_i^{a(i,n)}$ mit

a) $a(i,n) \in \mathbb{N}$

b) für alle n $a(i,n)=0$ für fast alle i

c) für alle m,n $f(m)|f(n) \Leftrightarrow$ für alle i $a(i,m) \leq a(i,n)$

(B2) $f(m) \cdot f(n) | f(m+n); a(i,m)+a(i,n) \leq a(i,m+n)$

(B3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(i,n)}{n} = b_i > 0$

(B4) $\frac{a(i,n)}{n} < b_i$

B sei die Familie der Funktionen f, die (B1-3) erfüllen und

BS die Familie der Funktionen f, die (B1-4) erfüllen.

BEMERKUNGEN. 1) Aus B2 folgt die Monotonie der $a(i,n)$ in n und aus B3, daß sie schließlich positiv werden. Also existiert ein m_0, sodaß für $m>m_0$ $f(m)$ keine Einheit ist.

2) Aus B2 folgt weiters, daß man sich im Problem C auf $m \leq j < 2m$ beschränken kann. Aus Bem.1 folgt ferner, daß für $m>m_0$ nur endlich viele m-tupel der y_j die Bedingung erfüllen, das Supremum $c_m(n)$ also ein Maximum ist.

3) Für $m \leq j < 2m$ sind nur endlich viele $a(i,j) \neq 0$. Es sei $N(m)$ das maximale i mit mindestens einem $a(i,j) \neq 0$ $(m \leq j < 2m)$.

Wir betrachten nun das folgende lineare Programm

$$(LP) \begin{cases} \sum\limits_{j=m}^{2m-1} a(i,j)x_j \leq b_i & (1 \leq i \leq N(m)) \\ x_j \geq 0 & (m \leq j \leq 2m-1) \\ z = \sum\limits_{j=m}^{2m-1} j\, x_j & \text{zu maximisieren.} \end{cases}$$

Dann gilt

SATZ 1. Ist $f \in B$, so existiert $c_m = \lim\limits_{n\to\infty} c_m(n)$ und mit $d_m = \max z$ im zugehörigen (LP) gilt $c_m = d_m$. Ist $f \in BS$, so gilt sogar $d_m = c_m = \sup c_m(n)$.

Beweis. Sei $M = \sum\limits_{j=m}^{2m-1} j = \frac{(3m-1)m}{2}$.

$$c_m(n) = \frac{1}{n} \Sigma j\, \bar{y}_j(n). \quad d_m = \Sigma j\, \bar{x}_j.$$

Wir wollen nun zeigen, daß

a) für große Werte von n aus einer optimalen Lösung $\bar{y}_j(n)$ von (C) eine fast optimale Lösung von (LP) und umgekehrt

b) aus einer optimalen Lösung $\bar{x}_j$ von (LP) eine fast optimale Lösung von (C) konstruiert werden kann.

Aus B3 [und B4] folgt
$\forall i \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_i(\varepsilon) \ \forall n > N_i \quad b_i - \varepsilon < \frac{a(i,n)}{n} \ [< b_i] < b_i(1+\varepsilon).$

a) Sei $\eta > 0$ $n > n_0(\eta) = \max\{N_i(\eta) : 1 \le i \le N(m)\}$,

so gilt mit $x_j = \frac{\bar{y}_j(n)}{n(1+\eta)}$

$$\Sigma a(i,j)x_j = \frac{1}{(1+\eta)} \cdot \frac{1}{n} \Sigma a(i,j)\bar{y}_j(n) \le \frac{a(i,n)}{n} \cdot \frac{1}{1+\eta} \le b_i.$$

Also sind die Ungleichungen von (LP) erfüllt und $c_m(n) \le d_m(1+\eta)$.

Ist $f \in BS$ so folgt aus (B4), daß sogar $x_j = \frac{\bar{y}_j(n)}{n}$ die Ungleichungen von (LP) erfüllen also $c_m(n) \le d_m$.

b) Sei $\delta > 0$, $\delta' = \frac{\delta}{2M}$ und $N = \max\{\frac{1}{\delta'}\} \cup \{N_i(\delta') \mid 1 \le i \le N(m)\}$.

Also $M\delta' = \frac{\delta}{2} > \frac{M}{N}$ und für $n > N$ gilt für alle $i \le N(m)$

$b_i - \delta' < \frac{a(i,n)}{n}$.

Sei $y_j(n) = \lfloor (\bar{x}_j - \delta')n \rfloor$ ganzzahlig, so ist für alle $i \le N(m)$

$\Sigma a(i,j) \ge 1$

und $\Sigma a(i,j)y_j(n) \le \Sigma a(i,j)n(\bar{x}_j - \delta') =$

$$= n(\Sigma a(i,j)\bar{x}_j - \delta'\Sigma a(i,j)) \le n(b_i - \delta') \le a(i,n).$$

Also $\Pi f(j)^{y_j(n)} \mid f(n)$ und somit

$$c_m(n) \ge \frac{1}{n} \Sigma j \ y_j(n) \ge \frac{1}{n} \Sigma j((\bar{x}_j - \delta')n - 1) =$$

$$= \Sigma j \ \bar{x}_j - \delta'\Sigma j - \frac{1}{n} \Sigma j = d_m - \delta'M - \frac{M}{n} \ge d_m - \delta.$$

Für $f \in B$ [$f \in BS$] gilt also für alle $\delta, \eta > 0$ für alle $n > \bar{N}(\delta, \eta)$

$$d_m - \delta \le c_m(n) [\le d_m] \le d_m(1+\eta)$$

also existiert

$$c_m = \lim_n c_m(n) [= \sup_n c_m(n)] = d_m.$$

Aus $f(n) \mid f(n)$ folgt sofort $c_m(n) \ge 1$ also auch $c_m \ge 1$. Eine weitere Aussage über das Verhalten der c_m für große m liefert

SATZ 2. Sei $i \leq N(m)$ beliebig und für $\eta > 0$ sei $N_i(\eta)$ wie im Beweis von Satz 1, so gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists j \geq m > N_i\left(\frac{\varepsilon b_i}{2}\right), \text{ sodaß } \frac{a(i,j)}{j} \geq b_i\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

also $b_i \geq \Sigma a(i,j)\bar{x}_j \geq b_i\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Sigma j\bar{x}_j = b_i\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) c_m$.

Somit gilt für $m > N$

$$1 \leq c_m \leq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \leq 1+\varepsilon$$

und daher $\lim c_m = 1$.

Die Abschätzung der c_m von oben kann noch verschärft werden. Dazu schreiben wir

$$a(i,j) = j\, b_i - \varphi_i(j), \quad \Phi_i(m) = \max\{\varphi_i(j) : m \leq j < 2m\}$$

und $m_i = \min\{j : m \leq j < 2m, \varphi_i(j) > 0\}$ falls nicht alle $\varphi_i(j) \leq 0$, sonst $m_i = \infty$.

SATZ 3. Für $f \in B$ gilt für alle $i \leq N(m)$

$$c_m \leq 1/\left(1 - \frac{\Phi_i(m)}{b_i\, m_i}\right),$$

also auch $c_m = 1 + O\left(\frac{\Phi_i(m)}{m}\right)$.

Beweis. Es gilt für $m_i < \infty$

$$m_i \sum_{j \geq m_i} \bar{x}_j \leq \sum_{j \geq m_i} j\, \bar{x}_j \leq \sum_{j \geq m} j\, \bar{x}_j = c_m$$

und daher auch

$$1 \geq \frac{1}{b_i} \Sigma a(i,j)\bar{x}_j \geq \sum_{j \geq m} j\, \bar{x}_j - \frac{1}{b_i} \sum_{j \geq m_i} \varphi_i(j)\bar{x}_j$$

$$\geq c_m - \frac{\Phi_i(m)}{b_i\, m_i} m_i\, \Sigma\, \bar{x}_j \geq c_m\left(1 - \frac{\Phi_i(m)}{b_i\, m_i}\right)$$

Für $m_i = \infty$ gilt $1 \geq \frac{1}{b_i} \Sigma a(i,j)\bar{x}_j \geq \Sigma j\, \bar{x}_j = c_m$, woraus die Behauptungen folgen

§ 2 ERDÖS PROBLEM ([1],[2])

Mit $R = \mathbb{Z}$ und $f(n) = n!$ gilt, daß für $n \geq 2$ $f(n)$ keine Einheit ist. Als $g_i = p_i$ können die Primzahlen in $\mathbb{N}$ gewählt werden und es gilt dann

$$a(i,n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p_i^k}\right] < \frac{n}{p_i - 1}$$

und

$$b_i = \lim_{n\to\infty} \frac{a(i,n)}{n} = \frac{1}{p_i-1} .$$

Wegen $\frac{f(n+m)}{f(n)f(m)} = \binom{n+m}{n} \in \mathbb{N}$

folgt, daß $f \in BS$.

Für $m\geq 2$ existieren also die Größen c_m und können mittels (LP) bestimmt werden.

Wegen $a(2,n) \geq n - 2 - \frac{\log n}{\log 2}$ und $b_2 = 1$ folgt aus Satz 3

$$c_m \leq 1/\left(1 - \frac{\log 4\ m}{m \log 2}\right) = 1 + \frac{1}{\log 2}\ \frac{\log m}{m} + o\left(\frac{\log m}{m}\right) .$$

Wir wollen nun noch die Ordnung von c_m-1 von unten abschätzen.

Wird mit $ZS(p,n)$ die Ziffernsumme von n in p-adischer Darstellung bezeichnet, so gilt

$$a(i,n) = (n-ZS(p_i,n))/(p_i-1).$$

Daher können die Ungleichungen von (LP) umgeschrieben werden in

$$\Sigma(j-ZS(p_i,j))x_j \leq 1.$$

Sei $\alpha = \frac{3 \log 5}{\log 720}$, $\gamma = \frac{1}{\log 5}$. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ und $m > m_0(\varepsilon)$ (noch zu bestimmen) sei $\gamma' = \gamma(1-\varepsilon)$, $R = \lfloor m^\alpha \rfloor$, $V = \gamma' R \log R$, $s_2 = \left\lceil \frac{\log R}{3} \left(4\gamma - \frac{1}{\log 2}\right) (1-\varepsilon)\right\rceil$, $s_3 = \left\lceil \frac{\log R}{3} \left(2\gamma - \frac{1}{\log 3}\right) (1-\varepsilon)\right\rceil$ und $S = 2^{s_2}3^{s_3}$. Weiters sei $M<S$ so bestimmt, daß $T = m+M\equiv -1 (\mathrm{mod}\ S)$ gilt.

Sei $J = \{T+kS: 0\leq k<R\}$ und $U = \sum_{j\in J} j = R(T + \frac{R-1}{2} S)$.

$$\text{Wegen } \log(RS)<(1+ \frac{4\gamma}{3} \log 2 - \frac{1}{3} + \frac{2\gamma}{3} \log 3 - \frac{1}{3})\log R$$

$$= \frac{1}{3 \log 5} (\log 5 + \log 16 + \log 9)\log R$$

$$= \frac{1}{\alpha} \log R < \log m \quad \text{für } m>m_1(\varepsilon)$$

gilt $RS = o(m)$.

Es sind daher alle $j\in J$ kleiner als $2m$ und $U \sim R.m$
$V \sim \alpha\gamma' R \log m = o(U)$.

Wählen wir $x_j = 0$ für $j\notin J$ und $x_j = \frac{1}{U-V}$ für $j\in J$, so gilt, da wir gleich zeigen werden, daß die x_j die Ungleichungen von (LP) erfüllen,

$$c_m \geq \Sigma j x_j = \frac{U}{U-V} = 1 + \frac{V}{U-V} = 1 + \alpha\gamma(1-\varepsilon)\ \frac{\log m}{m} + o\left(\frac{\log m}{m}\right)$$

$$\text{also } c_m - 1 = \Omega\left(\frac{\log m}{m}\right).$$

Wir müssen also nur noch zeigen, daß für alle Primzahlen p

$$\sum_{j\in J}(j-ZS(p,j))x_j \le 1,$$

also $U - \Sigma ZS(p,j) \le U-V$, also $V \le \sum_{j\in J} ZS(p,j)$.

Für $p\ge 5$ ist $T+k\cdot S \equiv T+k'\cdot S \pmod{p^{t+1}}$ äquivalent zu $k \equiv k' \pmod{p^{t+1}}$.

Für $p\ge R$ sind daher die ungünstigsten Reste (Einerziffern) $0,\dots,R-1$; also

$$\Sigma ZS(p,j) \ge \frac{R(R-1)}{2} > V \text{ für } m>m_2(\varepsilon).$$

Für $5\le p\le R$ $\quad rp^t \le R < (r+1)p^t \le p^{t+1}$

$$\sum_{j\in J} ZS(p,j) \ge \sum_{k=0}^{rp^t-1} ZS(p,k) = \frac{r(r-1)}{2}\,p^t + \frac{rp^t t(p-1)}{2}$$

da jede der p Ziffern an jeder der letzten t Stellen rp^{t-1} mal vorkommt, und jede der Ziffern $0,\dots,r-1$ an der ersten Stelle p^t mal vorkommt.

Es gilt also für $m>m_3(\varepsilon)$ $\sum_{j\in J} ZS(p,j) > 2rp^t\cdot \frac{\log R}{\log p}(1-\varepsilon)\cdot \frac{p-1}{4} \ge V$, da $\frac{x-1}{\log x}$ monoton wachsend für $x\ge 5$ und $2rp^t \ge (r+1)p^t > R$.

Für $p\le 3$ ist wegen $j = T+kS\equiv -1 \pmod S$ $\quad j\equiv -1 \pmod{p^{s_p}}$ und $j\equiv j' \pmod{p^{t+s_p+1}}$ äquivalent zu $k\equiv k' \pmod{p^{t+1}}$, also gilt für $rp^{t+s_p} \le R < (r+1)p^{t+s_p} \le p^{t+s_p+1}$ und $m>m_4(\varepsilon)$

$$\sum_{j\in J} ZS(p,j) \ge Rs_p(p-1) + \sum_{k=0}^{rp^t-1} ZS(p,k) =$$

$$= Rs_p(p-1) + \frac{r(r-1)}{2}\,p^t + \frac{rp^t t(p-1)}{2} \ge$$

$$\ge Rs_p(p-1) + 2rp^t\left(\frac{\log R}{\log p}\,(1-\varepsilon)-s_p\right)\frac{p-1}{4}$$

$$> R\left(\frac{3}{4}\,s_p(p-1) + \frac{\log R}{\log p}\,(1-\varepsilon)\right) = V.$$

Also sind für $m>\max_{i\le 4}(m_i(\varepsilon))$ die Ungleichungen von (LP) erfüllt und wir erhalten

<u>SATZ 4.</u>

$$1 + \frac{3}{\log 720}\frac{\log m}{m} - o\left(\frac{\log m}{m}\right) \le c_m \le 1 + \frac{1}{\log 2}\frac{\log m}{m} + o\left(\frac{\log m}{m}\right),$$

also $c_m - 1 = \Theta\left(\frac{\log m}{m}\right)$.

§ 3 L-ERDÖS PROBLEM

Hier sei wieder $R = \mathbb{Z}$, aber $f(n) = L^n \cdot n! = \prod_{j=1}^{n} (jL)$. Wieder mit $g_i = p_i$ gilt bei $L = \prod p_i^{\lambda_i}$ $a_L(i,n) = n\lambda_i + a(i,n)$ mit $a(i,n)$ aus § 2 und somit $b_{Li} = \lambda_i + b_i$ mit b_i aus § 2.

Wegen $\dfrac{f(n+m)}{f(n)f(m)} = \dfrac{L^{n+m}}{L^n \cdot L^m}\dbinom{n+m}{n} \in \mathbb{N}$

gilt wieder $f \in BS$.

Die Ungleichungen von (LP) können wir auch in der Form

$$\Sigma j\, x_j - \frac{1}{\lambda_i(p_i-1)+1}\, \Sigma ZS(p_i,j)x_j \le 1$$

schreiben.

Die uns interessierenden Größen c_{Lm} sind nun Funktionen von zwei Veränderlichen. In m sind sie wieder monoton fallend

$$c_{L,m+1} \le c_{Lm}.$$

Da für $L|K$ aus $\dfrac{n!}{\prod j!^{y_j}}\dfrac{1}{K^{\Sigma j y_j - n}} \in \mathbb{N}$ auch $\dfrac{n!}{\prod j!^{y_j}}\dfrac{1}{L^{\Sigma j y_j - n}} \in \mathbb{N}$ folgt,ist also $c_{Lm}(n) \ge c_{Km}(n)$.

Es gilt daher für $L|K$ $c_{Km} \le c_{Lm}$, also Monotonie der c_{Lm} im ersten Argument bezüglich der Halbordnung $\langle\mathbb{N},|\rangle$. Für L=1 erhalten wir das ERDÖS Problem von § 2.

<u>SATZ 5. Für festes</u> L <u>gilt</u>

$$c_{Lm} - 1 = \Theta\left(\frac{\log m}{m}\right) .$$

<u>Beweis.</u> Aus $c_{Lm} \le c_{1m} = c_m = 1 + O\left(\frac{\log m}{m}\right)$ folgt die obere Schranke.

Wie in § 2 kann mit $V' = \dfrac{V}{\max(\lambda_i(p_i-1)+1)}$ statt V

$c_{Lm} - 1 = \Omega\left(\frac{\log m}{m}\right)$ gezeigt werden.

Für das weitere sei für $L = \Pi p_i^{\lambda_i}$ $\Lambda_i = \Lambda_i(L) = \lambda_i(p_i-1)$ und $\Lambda = \Lambda(L) = \max \Lambda_i$ definiert. Bei gegebenem m betrachten wir ferner die Zerlegung $L = L'\cdot L''$ mit $L' = \prod_{p_i \le m} p_i^{\lambda_i}$ und $L'' = \prod_{p_i > m} p_i^{\lambda_i}$, sowie bezüglich dieser Zerlegung

$$\Lambda' = \Lambda(L') \text{ und } \Lambda'' = \Lambda(L'').$$

Für gewisse Wertepaare L,m kann man c_{Lm} in geschlossener Form angeben.

<u>SATZ 6.</u> Ist $m(\Lambda'+1) \le \Lambda''+1$ so gilt $c_{Lm} = 1 + \frac{1}{\Lambda(L)}$.

<u>Beweis.</u> Um den ersten Schritt des Simplexverfahrens mit der Spalte "m" durchzuführen berechnen wir $\min\limits_i q_i$ mit $q_i = \frac{b_{Li}}{a_L(i,m)}$ für $a_L(i,m) \neq 0$

Für $p_i \le m$ gilt $b_{Li} = \frac{\Lambda_i+1}{p_i-1}$ und

$$0 < a_L(i,m) = \lambda_i m + \frac{m-ZS(p_i,m)}{p_i-1} \le \frac{m(\Lambda_i+1)-1}{p_i-1}$$

also $q_i \ge \frac{\Lambda_i+1}{m(\Lambda_i+1)-1} \ge \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{m(\Lambda'+1)-1}\right)$.

Für $p_k > m$ gilt $b_{Lk} = \lambda_k + \frac{1}{p_k-1}$ und $a_L(k,m) = \lambda_k m$, also für $\lambda_k \neq 0$ $q_k = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{\Lambda_k}\right) \ge \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{\Lambda''}\right)$.

Für $m(\Lambda'+1) \le \Lambda''+1$ gilt daher $\min\limits_{p_k>m} q_k \le q_i$ und $\Lambda' < \Lambda''$. Sei nun $\Lambda = \Lambda'' = \Lambda_r$, so kann das Simplexverfahren mit der Zeile "r" und Spalte "m" durchgeführt werden. Dabei ergeben sich in der Zeile der Zielfunktion wegen

$$\frac{m a_L(r,j)}{a_L(r,m)} = \frac{1}{\lambda_r}(\lambda_r j + a(r,j)) \ge j$$

lauter nichtnegative Koeffizienten.

Es gilt daher $c_{Lm} = m q_r = 1 + \frac{1}{\Lambda}$.

<u>Folgerung.</u> Ist $L>1$ und $L'=1$, so ist $c_{Lm} = 1 + \frac{1}{\Lambda(L)} = c_{L1}$.

<u>Beweis.</u> Aus $\Lambda' = 0$ und $\Lambda'' \ge p_k-1 > m-1$ folgt, daß Satz 6 anwendbar ist.

SATZ 7. Für $L>1$ gilt

$$1+\frac{1}{2m\Lambda}\le\min\left(1+\frac{1}{m(1+\Lambda')},1+\frac{1}{\Lambda''}\right)\le c_{Lm}\le\min\left(1+\frac{4}{1+\Lambda'},1+\frac{1}{\Lambda''}\right)\le 1+\frac{4}{\Lambda}\ .$$

Beweis. 1) Wählen wir $x_j=0$ für $j>m$ und $x_m=\frac{U}{m}$ und $U=\min\left(1+\frac{1}{m(1+\Lambda')},1+\frac{1}{\Lambda''}\right)\ge 1+\frac{1}{2m\Lambda}$ so gilt für $p_i\le m$

$$a_L(i,m)x_m\le(\lambda_i m+a(i,m))\frac{U}{m}\le\left(\lambda_i m+\frac{m-1}{p_i-1}\right)\left(1+\frac{1}{m(1+\Lambda')}\right)\frac{1}{m}$$

$$=\frac{(1+\Lambda_i)m-1}{p_i-1}\left(1+\frac{1}{m(1+\Lambda')}\right)\frac{1}{m}=$$

$$=\frac{1+\Lambda_i}{p_i-1}\left(1-\frac{1}{m(1+\Lambda_i)}\right)\left(1+\frac{1}{m(1+\Lambda')}\right)<\frac{1+\Lambda_i}{p_i-1}=b_{Li}$$

und für $p_k>m$ mit $\lambda_k\neq 0$

$$a_L(k,m)x_m=\lambda_k U\le\frac{\Lambda_k}{p_k-1}\left(1+\frac{1}{\Lambda_k}\right)=b_{Lk}.$$

Da also eine Lösung der Ungleichungen des (LP) vorliegt, gilt

$$c_{Lm}\ge U.$$

2) Ist $L''>1$ $(\Lambda''>0)$ so gilt

$$c_{Lm}\le c_{L''m}=1+\frac{1}{\Lambda''}\ .$$

Ist $L'>1$ so gilt wegen Satz 3 und

$$a_L(i,j)=jb_{Li}-\frac{ZS(p_i,j)}{p_i-1}\qquad\Phi_i(m)\le\frac{\log 2m}{\log p_i}$$

$$c_{L'm}\le 1+2\,\frac{\Phi_i(m)}{b_{Li}}\le 1+2\,\frac{p_i-1}{\log p_i}\,\frac{\log 2m}{m}\quad\frac{1}{1+\Lambda_i}\ .$$

Da $\frac{x-1}{\log x}$ monoton wächst, gilt

$$c_{L'm}\le 1+2\,\frac{2m-1}{\log 2m}\,\frac{\log 2m}{m}\cdot\frac{1}{1+\Lambda'}<1+\frac{4}{1+\Lambda'}\ .$$

Das asymptotische Verhalten von c_{Lm} bei festem m beschreibt der folgende Satz.

SATZ 8. Für festes $m>1$ gilt

$$c_{Lm}=\Omega\left(\frac{1}{L}\right)\quad\text{und}\quad c_{Lm}=O\left(\frac{\log\log L}{\log L}\right)\ .$$

Beide Ordnungsschranken sind scharf.

<u>Beweis.</u> Da nach Satz 7 $c_{Lm} = \Theta\left(\frac{1}{\Lambda(L)}\right)$ haben wir $\Lambda = O(L)$ und $\Lambda = \Omega\left(\frac{\log L}{\log\log L}\right)$, also $\frac{\log L}{\log\log L} = O(\Lambda(L))$ zu zeigen.

1) Aus $L = \Pi p_i^{\lambda_i} \geq p^\lambda \geq p$ folgt

$$\log L \geq \lambda \log p = \Lambda \frac{\log p}{p-1} \geq \Lambda \frac{\log L}{L-1}$$

also $\Lambda < L = O(L)$.

Durchläuft L die Folge der Primzahlen so ist $\Lambda(L) = L-1 \sim L$ womit die untere Ordnungsschranke und ihre Schärfe bewiesen ist.

2) Für gegebenes Λ sei $\bar{L} = L(\Lambda) = \prod_{p_i \leq \Lambda+1} p_i^{\lambda_i}$ mit

$$\lambda_i = \left\lfloor \frac{\Lambda}{p_i - 1} \right\rfloor .$$

Es gilt dann wegen $\sum_{p_i \leq \Lambda+1} \frac{\log p_i}{p_i} \sim \log(\Lambda+1) + O(1)$ (siehe [3] 115) und $\Sigma \frac{\log p_i}{p_i(p_i-1)}$ konvergent (siehe [3] 113) und

$$\sum_{p_i \leq \Lambda+1} \log p_i < c \log(\Lambda+1) \text{ (siehe [3] 116)}$$

$$\log \bar{L} = \Sigma\lambda_i \log p_i \leq \Lambda\Sigma \frac{\log p_i}{p_i - 1} \sim \Lambda \log \Lambda$$

und $\log \bar{L} \geq \Lambda\Sigma \frac{\log p_i}{p_i - 1} - \Sigma \log p_i \sim \Lambda \log \Lambda$

also $\log \bar{L} \sim \Lambda \log \Lambda$.

Daher mit $\log\log \bar{L} \sim \log \Lambda + \log\log \Lambda \sim \log \Lambda$

$$\frac{\log L(\Lambda)}{\log\log L(\Lambda)} \sim \Lambda .$$

Wegen $L \leq L(\Lambda(L))$ und $\frac{x}{\log x}$ monoton wachsend gilt

$$\frac{\log L}{\log\log L} = O(\Lambda)$$

und die Ordnungsschranke ist wegen der Folge $L(\Lambda)$ scharf.

Nun sei noch der Spezialfall $m=2$ betrachtet.

Hier treten im (LP) nur zwei echte Variable x_2, x_3 auf. Je nach dem Wert von L liefern maximal zwei Schritte des Simplexverfahrens das Ergebnis. Zur geschlossenen Darstellung definieren wir einige Hilfsgrößen.

Sei $L = \Pi p_i^{\lambda_i}$ $\mu_i = 2\lambda_0+1-\Lambda_i$ (also $\mu_0=\lambda_0+1>0$);

$\nu_0 = \frac{\mu_0}{2}$, $\nu_1 = \frac{\mu_1}{3}$ und $\nu_i = \mu_i$ für $i\geq 2$;

$\chi_i = 2\lambda_0+1-\nu_i$, also $\chi_0 = \frac{3\lambda_0+1}{2}$, $\chi_1 = \frac{2(2\lambda_0+1+\lambda_1)}{3}$

$\chi_i = \Lambda_i$ für $i\geq 2$. Sei $\chi(L) = \max \chi_i$.

<u>SATZ 9.</u> 1) <u>Gibt es</u> ein $\mu_i\leq 0$, <u>so ist</u> $c_{L2} = 1 + \frac{1}{\Lambda(L)}$

2) <u>Sind alle</u> $\mu_i>0$, <u>so ist</u> $c_{L2} = 1 + \frac{1}{\chi(L)}$.

<u>Beweis.</u> 1) $m(\Lambda'+1) = 2(\lambda_0+1) \leq \Lambda+1$, also liefert Satz 6

$$c_{L2} = 1 + \frac{1}{\Lambda(L)} \text{ mit } \bar{x}_2 = \frac{1}{2} c_{L2} \text{ und } \bar{x}_3 = 0.$$

2) Hier ist $q_0\geq q_i$. Der erste Schritt wird also mit der Zeile "0" und der Spalte x_2 durchgeführt. Er läßt in der Zeile der Zielfunktion bei x_3 den Koeffizienten $-\frac{1}{2\lambda_0+1}$. Die nun in der Spalte x_3 zu betrachtenden Quotienten sind gerade

$$\frac{2\lambda_0+1}{\chi_i} - 1.$$

Der zweite Schritt muß also in der Zeile "k" mit $\chi_k = \chi(L)$ durchgeführt werden und bringt

$$c_{L2} = 2\cdot \frac{\lambda_0+1}{2\lambda_0+1} + \frac{1}{2\lambda_0+1}\left(\frac{2\lambda_0+1}{\chi(L)} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\chi(L)},$$

da alle Koeffizienten in der Zeile der Zielfunktion nichtnegativ werden.

Ist $k=0$ ergibt sich $\bar{x}_2=0$, $\bar{x}_3= \frac{\lambda_0+1}{3\lambda_0+1}$ $c_{L2} = 1 + \frac{2}{3\lambda_0+1}$.

Ist $k>0$ so ergibt sich $\bar{x}_2 = \frac{\lambda_0+1}{2\lambda_0+1}$, $\bar{x}_3 = \frac{\nu_k}{\chi_k}$.

<u>Folgerung.</u> Für $L = 2^\lambda>1$ gilt $c_{L2} = 1 + \frac{2}{3\lambda+1}$.

<u>Beweis.</u> In Satz 9 tritt Fall 2 mit $k=0$ auf.

§ 4 q-ERDÖS PROBLEM

Hier sei $R = Q[q]$ der Polynomring über Q und $f(n)=\prod_{k=1}^{n} \frac{1-q^k}{1-q}$ die q-Faktorielle.

Als g_i wählen wir hier für $i\geq 2$ $g_i = \prod_{(i,j)=1} (q-\zeta_i^j)$, wobei ζ_i die i-te Einheitswurzel mit kleinstem positiven Argument ist. In g_i sind alle i-ten Einheitswurzeln zusammengefaßt, die nicht Einheitswurzeln mit kleinerem Exponenten sind.

Wir erhalten $a^{(q)}(i,n) = \lfloor\frac{n}{i}\rfloor, b_i^{(q)} = \frac{1}{i}$ und wegen

$\frac{f(m+n)}{f(m)f(n)} \in Q[q]$ der q-Binomialkoeffizient $f \in BS$.

<u>SATZ 10.</u> $c_{2k}^{(q)} = c_{2k+1}^{(q)} = 1 + \frac{1}{2k+1}$.

<u>Beweis.</u> a) Ist $m=2k+1 \not\equiv 1(\text{mod } 3)$, so prüft man leicht nach, daß

$$x_{2k+1} = x_{2k+3} = \frac{1}{2(2k+1)}, \quad x_j = 0 \text{ sonst}$$

eine zulässige Lösung von (LP) ist, also gilt hier $c_{2k+1}^{(q)}\geq 1+\frac{1}{2k+1}$.

Ist $m = 2k+1 \equiv 1(\text{mod } 3)$, so ist

$$x_{2k+1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{2k+1}, \quad x_{2k+3} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{2k+1} = x_{2k+5}, \quad x_j = 0 \text{ sonst}$$

eine zulässige Lösung, also auch hier

$$c_{2k+1}^{(q)} \geq 1+\frac{1}{2k+1}.$$

b) Aus $a^{(q)}(2,j) = \lfloor\frac{j}{2}\rfloor = \begin{cases} \frac{j}{2} & j \text{ gerade} \\ \frac{j-1}{2} & j \text{ ungerade} \end{cases}$

folgt

$$\frac{1}{2} \geq \Sigma a^{(q)}(2,j)\bar{x}_j = \sum_{\text{ger}} \frac{j}{2}\bar{x}_j + \sum_{\text{unger}} \frac{j}{2}\bar{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{\text{unger}} \bar{x}_j = \frac{1}{2}c_m^{(q)} - \frac{1}{2}\sum_{\text{unger}} \bar{x}_j$$

$$c_m^{(q)} \leq 1+\sum_{\text{unger}} \bar{x}_j.$$

Aus $a^{(q)}(2k+1,j) = 1$ für $2k+1\leq j\leq 4k+1$ folgt für $m=2k$ und $m=2k+1$

$$c_m^{(q)}\leq 1+\sum_{\text{unger}} \bar{x}_j\leq 1+\sum_{j\geq 2k+1} a^{(q)}(2k+1,j)\bar{x}_j\leq 1+\frac{1}{2k+1}.$$

c) Wegen $c_m^{(q)} \geq c_{m+1}^{(q)}$ folgt aus a und b

$$1+\frac{1}{2k+1} \leq c_{2k+1}^{(q)} \leq c_{2k}^{(q)} \leq 1+\frac{1}{2k+1},$$

also die Behauptung des Satzes.

§ 5 L-q-ERDÖS PROBLEM

Hier ist wieder $R = Q[q]$, aber

$$f(n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-q^{Lk}}{1-q} = \left(\frac{1-q^L}{1-q}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1-q^{Lk}}{1-q^L} .$$

Wieder mit $g_i = \prod_{(i,j)=1} (q-\zeta_i^j)$ erhält man für $i \geq 2$

$$a_L^{(q)}(i,n) = \left\lfloor \frac{Ln}{\mathrm{kgV}(L,i)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mathrm{ggT}(L,i)\ n}{i} \right\rfloor,$$

$$b_{Li}^{(q)} = \frac{\mathrm{ggT}(L,i)}{i} .$$

Für $i=L$ ergibt sich $a_L^{(q)}(L,j) = \lfloor \frac{Lj}{L} \rfloor = j$, $b_{LL}^{(q)} = 1$.

Die L-te Zeile im (LP) lautet also $\Sigma j x_j \leq 1$,also gilt

$$c_{L,m}^{(q)} \leq 1$$

und daher

<u>SATZ 11. Für</u> $L \geq 2$ <u>gilt für alle</u> $m \geq 1$

$$c_{Lm}^{(q)} = 1.$$

LITERATUR.

[1] ERDÖS P., Problem 85-6*. The Mathematical Intelligencer 7(1985), p 35.

[2] BARON G., Solution of Problem 85-6*. The Mathematical Intelligencer 8(1986), pp 42-43.

[3] RADEMACHER M., Lectures on Elementary Number Theory, Blaisdale Publ.Comp.(1964).

Gerd Baron
Inst.f.Algebra u.Diskrete Mathematik
der Technischen Universität Wien
Wiedner Hauptstr.8-10
1040 WIEN

METRISCHE SÄTZE DER C-GLEICHVERTEILUNG AUF DER SPHÄRE

M. BLÜMLINGER M. DRMOTA R.F. TICHY

Abstract. In this paper the weighted C-uniform distribution is considered on the sphere. A sufficient condition for the weight g is given to guarantee that almost all (with respect to the Wiener measure) continuous functions are uniformly distributed. A law of iterated logarithm is stated for the n-dimensional sphere.

1. EIN METRISCHER SATZ FÜR GEWICHTE

E. Hlawka [6] hat für den Fall der modulo 1-Gleichverteilung nachgewiesen, daß im Sinne des Wienerschen Maßes f.a. Funktionen bezüglich sehr allgemeiner Gewichte gleichverteilt sind. In diesem Abschnitt soll ein ähnlicher Satz für die Sphäre bewiesen werden. Dafür benötigt man zunächst ein sphärisches Wienersches Maß, das sich wie im Euklidschen Fall aus einer Brownschen Bewegung ableitet. Diese wird durch ein System $\{\mu_w: w\in S^d\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die jeweils auf $C_w=\{\omega:\ [\infty,0)\to S^d,\ \omega$ stetig und $\omega(0)=w\}$ definiert sind beschrieben. Sei B eine Borelmenge des $(S^d)^n$ und $0<t_1< \ldots <t_n$ feste aber beliebige Zeitpunkte, dann gilt

$$(1.1)\quad \mu_w\Big(\{\omega\in C_w:\ (\omega(t_1),\ \ldots,\ \omega(t_n))\in B\}\Big) = \\ = \int_B p(t_1;w,x_1)p(t_2-t_1;x_1,x_2)\ \ldots\ p(t_n-t_{n-1};x_{n-1},x_n)\ dx_1\ldots dx_n$$

wobei

$$(1.2)\qquad p(t;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(n)P_n(x\cdot y)\ \exp\left(\frac{-n(n+d-1)}{2}\ t\right)$$

die Übergangswahrscheinlichkeit von x nach y im Zeitintervall t bedeutet. P_n bezeichnet die n-te Legendrefunktion der Ordnung d und Z(n) die Anzahl der linear unabhängigen harmonischen Polynome vom Grad n in d Veränderlichen (vgl. [12]). Aus (1.1) folgt für jede meßbare Funktion f: $(S^d)^n\to R$

$$(1.3)\qquad \begin{aligned}&\int_{C_w} f(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n))d\mu_w(\omega) = \\ &= \int_{(S^d)^n} f(x_1, \ldots, x_n)p(t_1;w,x_1)\ldots p(t_n-t_{n-1};x_{n-1},x_n)\, dx_1\ldots dx_n\end{aligned}$$

μ_w bezeichnet bei beliebigem aber festem w das sphärische Wienersche Maß. Man erfaßt dadurch nur Funktionen aus C_w, was aber insofern keine Einschränkung darstellt, als man jede stetige Funktion $\omega(t)$ durch eine orthogonale Transformation T mit $\hat{\omega}(0)=T\omega(0)=w$ in eine Funktion $\omega(t)$ aus C_w überführen kann. $\omega(t)$ ist nach dem Weylschen Kriterium genau dann g-gleichverteilt, wenn $\omega(t)$ g-gleichverteilt ist.

Für eine genauere Darstellung der Brownschen Bewegung auf der Sphäre sei auf Itô-McKean [9] verwiesen. Die verwendeten Bezeichnungen und Sätze aus der Theorie der Gleichverteilung sind in den Büchern von Hlawka [7] und Kuipers-Niederreiter [10] zu finden. Neben der erwähnten Arbeit [6] sind weitere Ergebnise in [7] und für den mehrdimensionalen Fall in [4] zu finden. Auf der Sphäre wurde Gleichverteilung in [2,3,8,15] untersucht, in [1] auf kompakten homogenen Räumen. Hier soll eine hinreichende Bedingung für ein Gewicht g gegeben werden, sodaß μ_w-f.a. Funktionen auf der Sphäre g-gleichverteilt sind.

<u>SATZ 1.</u> <u>Sei</u> g(t) <u>ein positives Gewicht mit</u>

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds \quad \underline{\text{und}} \lim_{t\to\infty} G(t) = \infty .$$

<u>Ferner gelte</u>

$$(1.4)\qquad \frac{g(t)}{G(t)}t^{\alpha} \ll 1 \quad \underline{\text{für ein}}\ \alpha>0.$$

<u>Dann sind</u> μ_w<u>-f.a. Funktionen aus</u> C_w <u>g-gleichverteilt.</u>

Aus (1.4) folgt unmittelbar:

$$(1.5)\qquad G(t) \leqq C_1\exp(C_2 t^{1-\alpha}), \qquad C_1, C_2 \text{ konstant.}$$

Der Beweis des Satzes stützt sich auf die folgenden Hilfssätze:

<u>HILFSSATZ 1. (Loynes [11]) Sei</u> G(t) <u>wie in Satz 1 erklärt und</u> u <u>eine beschränkte, G-meßbare Funktion auf</u> R^+. ψ <u>sei eine nichtnegative Funktion auf</u> R, <u>die</u>

$$\lim_{x\to x_0} \psi(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

<u>erfüllt. Sei die Funktion</u> S_T <u>durch</u>