LEHRBUCH

$$v = \sum_{b \in B} v_b \cdot b$$

Stefan Waldmann

Lineare Algebra 1

Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik

Springer Spektrum

Lineare Algebra I

Stefan Waldmann

Lineare Algebra I

Die Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik

Springer Spektrum

Stefan Waldmann
Institut für Mathematik
Universität Würzburg
Würzburg, Deutschland

ISBN: 978-3-662-49913-9 ISBN: 978-3-662-49914-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-49914-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Dr. Lisa Edelhäuser

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg

Für meine Lieben:
Robert, Sonja, Richard, Silvia und Viola

Vorwort

Es gibt viele Lehrbücher zur linearen Algebra wie etwa [3, 4, 11–16, 21] und viele andere mehr, wieso also noch ein weiteres? Hierfür gibt es verschiedene Gründe: Zum einen sind verschiedene gute Lehrbücher nicht länger im Handel erhältlich, andere setzen deutlich unterschiedliche innermathematische Schwerpunkte als das vorliegende, wieder andere nehmen andere Bezüge zu Anwendungen außerhalb der Mathematik. In den meisten Lehrbüchern ist lediglich das Material für ein Semester lineare Algebra vorgegeben, das zweite Semester bleibt dann den Vorlieben des jeweiligen Dozenten vorbehalten.

Eine Motivation für dieses zweibändige Lehrbuch ist nun die folgende: Es gibt wenige Lehrbücher der linearen Algebra, die zum einen die Bedürfnisse der reinen Mathematik gut abbilden, zum anderen aber auch die Erfordernisse eines mathematisch ausgerichteten Physikstudiums bedienen. An vielen Universitäten besuchen Studierende der Physik entweder die selben Vorlesungen wie die Studierenden der Mathematik, ohne hier wirklich die relevanten Probleme aus der Physik zu sehen, oder aber sie besuchen eigene Mathematikvorlesungen, die oftmals den mathematisch interessierteren Studierenden der Physik zu wenig Tiefgang bieten. Ein Ziel ist es daher, die mathematischen Erfordernisse der Physik angemessen innerhalb der Mathematik darzustellen, nicht zuletzt auch deshalb, um Studierenden der Mathematik die ungemein wichtigen Ideen aus der Physik zu verdeutlichen. Eine zweite Motivation ist, dass es unter den neueren Lehrbüchern viele gibt, die die Anwendungsseite der linearen Algebra besonders gut und ausführlich hervorheben, die eher konzeptuellen Aspekte aber kürzer halten. Der Gang in die Abstraktion aber ist ein wesentlicher Schritt der Mathematik, den man im ersten Semester niemandem ersparen kann. Mit diesem Lehrbuch soll nun insofern eine Alternative geboten werden, als dass die Abstraktion als ein Vorteil, eine Erleichterung gesehen wird, die es erlaubt, aus der unübersichtlichen Lage eines konkreten Beispiels die charakteristischen Eigenschaften zu destillieren. Gerade im Hinblick auf neuere Bachelor-Studiengänge, wie etwa den Studiengang *Mathematische Physik* in Würzburg, besteht zwischen den beiden Zielen keineswegs ein Widerspruch: Im Gegenteil, in der mathematischen Physik wird die Gänze der Mathematik benötigt, nicht nur die anwendungsbezogeneren Aspekte. Das vorliegende Lehrbuch versucht nun, diese Brücke zu schlagen und damit ein Lücke zu schließen.

Die Zielgruppe für dieses Lehrbuch sind also Studentinnen und Studenten der verschiedenen Bachelor-Studiengänge der Mathematik (Mathematik, Wirtschaftsmathematik, etc.), des Lehramts Mathematik für Gymnasien, sowie der Physik und mathematischen Physik. Es eignet sich zum einen als Vorlesungsbegleiter, zum anderen aber auch zum Selbststudium, sofern dieses mit der nötigen Konsequenz betrieben wird.

Das Lehrbuch ist in zwei Bände aufgeteilt, die etwa den beiden Semestern entsprechen, die eine typische Vorlesung zur linearen Algebra dauert. Der vorliegende Band 1 ist dabei etwas umfangreicher und wird vielleicht nicht komplett in einem Semester behandelt werden können. Er umfasst die kanonischen Themen der linearen Algebra. In Band 2 werden dann weiterführende Themen angeboten.

Nach einer ersten Erinnerung an das Schulwissen zu Vektoren im $\mathbb{R}^3$ in Kap. 1 werden in Kap. 3 die grundlegenden Begriffe zu Gruppen, Ringen und Körpern vorgestellt und mit Beispielen untermauert. Als erstes großes Resultat werden die komplexen Zahlen aus den reellen konstruiert.

Als Nächstes werden in Kap. 4 Vektorräume mit ihren Basen als die zentrale Arena der linearen Algebra vorgestellt: Als Motivation dient hier die Lösungstheorie von linearen Gleichungssystemen. Es gilt nun, den Begriff der Dimension zu klären und verschiedene Konstruktionen wie etwa die direkte Summe zu erläutern. Es wird konsequent auch der unendlich-dimensionale Fall mit diskutiert, da unzählige Anwendungen wie etwa in der Funktionalanalysis diese Situation erfordern.

Ein durchgehendes Thema im gesamten Lehrbuch ist die konsequente Betonung von strukturerhaltenden Abbildungen: Auch wenn dies manchmal etwas altmodisch und sogar pedantisch scheint, stellt es doch ein derart mächtiges Werkzeug in der Mathematik dar, dass man es Studierenden im ersten Jahr kaum vorenthalten mag. Kap. 5 handelt daher ausführlich von den linearen Abbildungen. Auch diese werden durch Basen der zugrunde liegenden Vektorräume beschreibbar, was auf die Matrizen führt. Erst das Wechselspiel von basisabhängiger Beschreibung durch Matrizen und basisunabhängiger und damit intrinsischer Form offenbart die tatsächliche Natur linearer Abbildungen. Als wichtiges Resultat wird die Smith-Normalform von linearen Abbildungen diskutiert und die Beziehung zur Lösungstheorie von linearen Gleichungssystemen aufgezeigt. Die Klassifikation von Vektorräumen bezüglich Isomorphie anhand der Mächtigkeit der Basis wird im Detail vorgestellt. Der Dualraum behandelt schließlich eine spezielle Klasse von linearen Abbildungen, die linearen Funktionale.

Das darauffolgende Kap. 6 beinhaltet die Theorie der Determinanten sowie die Eigenwerttheorie, vornehmlich in endlichen Dimensionen. Nach einer kurzen Übersicht zu Eigenschaften der symmetrischen Gruppe wird die Determinante definiert und konstruiert sowie deren erste wichtige Eigenschaften vorgestellt. Als Kriterium für die Invertierbarkeit wird sie entsprechend bei der Suche nach Eigenwerten eine zentrale Rolle spielen: Diese Fragestellung wird durch die Normalform bezüglich der Ähnlichkeit von Matrizen motiviert. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit führt über das charakteristische Polynom dann zum Minimalpolynom einer Matrix (oder eines Endomorphismus), welches als zentrales Instrument beim Beweis des Spektralsatzes und der Jordan-Zerlegung herangezogen wird. Als Formulierung wurde hier eine auf Projektoren basierende gewählt, da diese den Ausgangspunkt für Verallgemeinerungen in unendlichen Dimensionen in der Funktionalanalysis darstellt. Die Jordan-Normalform hilft schließlich, auch die nilpotenten Anteile auf eine besonders einfache Form zu bringen.

In Kap. 7 geht es dann um Vektorräume mit zusätzlicher Struktur: Innere Produkte und Skalarprodukte werden definiert und erste allgemeine Eigenschaften vorgestellt. Es wird dann der spezielle Fall der endlich-dimensionalen euklidischen oder unitären Vektorräume, also der endlich-dimensionalen reellen oder komplexen Hilbert-Räume eingehend diskutiert, wobei aber immer der Blick auf die unendlich-dimensionale Situation offen gehalten wird, um zu sehen, dass viele scheinbar leichte Probleme letztlich auf sehr nichttriviale Weise Gebrauch von der Endlich-Dimensionalität machen. Als zentraler Satz wird auch in diesem Kapitel der Spektralsatz formuliert, nun für normale Abbildungen. Anschließend wird die Rolle der Positivität und der Polarzerlegung besonders betont. Dies mag in anderen Zugängen zur linearen Algebra eine eher untergeordnete Rolle spielen, ist aber für weiterführende Vorlesungen in der Lie-Theorie, den Operatoralgebren und der mathematischen Physik von zentraler Bedeutung. Daher wird bereits hier die Chance ergriffen, diese Themen in den einfachen endlichen Dimensionen vorzustellen. Auch die Diskussion der Singulärwertzerlegung ist in diesem Sinne zu verstehen, wobei mit den Approximationszahlen eine weitere wichtige Interpretation der Singulärwerte vorgestellt wird, die dann auch in unendlichen Dimensionen Bestand haben wird.

Abschließend werden in zwei Anhängen kleine Einführungen in die mathematische Logik sowie in die Sprache der Mengenlehre gegeben. Diese Anhänge sind jedoch nicht als solide Kurse in diesen mathematischen Disziplinen zu verstehen, sondern geben lediglich eine Übersicht.

Sowohl im Haupttext als auch in den Übungen wird gelegentlich Gebrauch von einfachen Resultaten aus der Analysis gemacht. In den allermeisten Fällen wird parallel zu einer linearen Algebra auch die Analysis als Einführungsvorlesung zur Mathematik gehört. In diesem Fall sollten die benötigten Ergebnisse zeitnah bereitgestellt sein, sodass es keinerlei Schwierigkeiten geben sollte. Anderenfalls müssen gewisse Ergebnisse vorweggenommen werden: Bis auf einige Eigenschaften des Supremums bei der Definition der Operatornorm sind dies aber alles Themen, die zumindest heuristisch und auf Schulniveau bekannt sein sollten. Auch in diesem Fall kann man gegebenenfalls das eine oder andere Detail eines Beweises hintenanstellen und zu einem späteren Zeitpunkt darauf zurückkommen.

In Band 2 werden dann etwas speziellere Themen behandelt: lineare Differentialgleichungen als Anwendung für die Matrix-Exponentialfunktion, verschiedene Quotientenkonstruktionen, sehr ausführlich die multilineare Algebra und Tensorprodukte und schließlich Bilinearformen. Gerade der Themenkomplex zu Tensorprodukten ist in vielen Lehrbüchern nur sehr stiefmütterlich vertreten, was seiner Bedeutung in der Mathematik keineswegs gerecht wird: Techniken der multilinearen Algebra werden in jeder fortgeschrittenen Vorlesung in der theoretischen Mathematik benötigt, wie etwa in der Algebra, der Lie-Theorie, der algebraischen Topologie, der Differentialgeometrie, der Funktionalanalysis und der homologischen Algebra. Aber auch in den Anwendungen wie beispielsweise in der

Quanteninformationstheorie und in der mathematischen Physik sind Tensorprodukte nicht wegzudenken. Die Gliederung von Band 2 ist nun folgende:

- Lineare Differentialgleichungen und Exponentialabbildung
- Quotienten
- Multilineare Abbildungen und Tensorprodukte
- Bilinearformen und Quadriken

In diesem Lehrbuch finden sich nur recht wenige mathematische Sachverhalte, die als *Satz* gekennzeichnet werden. Zusammen mit den *Definitionen* stellen diese die Essenz und das absolute Minimum dar, das es im Laufe eines Kurses zur linearen Algebra zu bewältigen gilt. Die meisten Resultate werden als *Proposition* formuliert, dies sind allein stehende Ergebnisse. Schließlich gibt es noch *Lemmata*, welche als Vorbereitung für die Beweise einer größeren Proposition oder eines Satzes dienen, und die *Korollare*, die eine unmittelbare Folgerung zur davor stehenden Proposition darstellen. In diesem Sinne ist der Text in sehr klassischer Weise geschrieben. Aufgelockert wird er durch Beispiele und weitere Bemerkungen, die oft einen weiterführenden Aspekt diskutieren oder einfach nur die wichtigen Sätze umformulieren und rekapitulieren.

Die Mathematik ist wie Schwimmen: Man erlernt sie sicherlich nicht durch Zuschauen. Vielmehr muss selbst Hand angelegt werden. Diese Erfahrung machen Studierende im ersten Jahr oftmals auf schmerzliche Weise: Anders als in der Schule ist es nun wirklich ein täglicher Kampf und eine große Herausforderung, der Vorlesung zu folgen, die Hausaufgaben zu machen, sich auf Klausuren vorzubereiten. Dies kann leider niemandem erspart bleiben, alle Versuche, dies zu beschönigen, sind unredlich und unseriös. Aus diesem Grunde werden viele Übungen (insgesamt über 200) in den einzelnen Kapiteln angeboten: Diese zum Teil sehr detailliert in etlichen Unterfragen ausformulierten Aufgaben sollten bearbeitet werden und können als Richtschnur dafür dienen, was in Klausuren und mündlichen Prüfungen von den Prüflingen verlangt werden wird. Zum anderen stellen die Übungen weiterführende Themen vor, auf die man vielleicht später wieder zurückkommen mag, auch wenn sie im ersten Jahr noch nicht relevant erscheinen. Hier besteht die Hoffnung, dass das vorliegende Buch ein Ideengeber und ein Nachschlagewerk auch für höhere Semester sein kann. Es gibt bei den schwierigeren Übungen Hinweise, durch die Aufteilung in kleinere separate Problemstellungen sollte es jedoch immer möglich sein, die richtigen Antworten zu finden. Aus diesem Grunde wurde auch darauf verzichtet, ausführliche Lösungen der Übungen bereitzustellen: Der Erfahrung nach ist die Versuchung, diese nach nur kurzem Probieren zu lesen und dann zu sagen, „Ach ja, so wollte ich das ja auch machen.“, doch zu groß.

Es gibt neben vielen Standardaufgaben, die auf die eine oder andere Weise in jedem Buch und in jeder Vorlesung zur linearen Algebra zu finden sind, einige besondere Übungen: Zunächst werden am Ende jedes Abschnitts kleine Kontrollfragen gestellt. Diese sollen dazu dienen, sich nochmals klar zu machen, um welche Inhalte es gerade ging und wie diese einzuordnen sind. Weiter gibt es eine Reihe von Übungen mit starker Motivation aus der Physik. Auch wenn diese vielleicht in parallelen Physikkursen erst später relevant werden, können die Probleme immer schon jetzt behandelt und gelöst werden. Dies ist insbesondere auch dann interessant, wenn die Physik nicht unbedingt im Zentrum des Interesses liegt: Der Wert dieser Übungen ist davon unabhängig. Es gibt ebenfalls eine Reihe von Übungen zum Erstellen von Übungen. Diese Meta-Übungen wurden deshalb eingefügt, da die Erstellung von konkreten Zahlenbeispielen oftmals viel interessanter ist, als das Lösen der resultierenden Rechenaufgaben selbst. Letztere sind eigentlich langweilig und haben in einem Mathematikstudium sehr wenig oder gar nichts verloren. Das Erstellen von sinnvollen Aufgaben dagegen ist nicht zuletzt für die Lehramtsstudierenden von zentraler Bedeutung für ihren späteren Beruf. Es werden in diesen Übungen also die „Tricks" der Aufgabensteller verraten, die es einem selbst ermöglichen, sich Zahlenbeispiele zu konstruieren, deren Lösungen gut kontrolliert werden können. Als letzte Übung in jedem Kapitel gibt es eine „Beweisen oder widerlegen"-Übung. Hier sollen typischerweise schnelle und einfache Argumente oder Gegenbeispiele gefunden werden. Diese Fragen sind gleichsam auch typische Prüfungsfragen, wie sie in mündlichen Prüfungen (oder auch in Klausuren) auftreten können.

Kein Buch ist fehlerfrei, so sind auch in diesem Lehrbuch möglicherweise noch an einigen Stellen Fehler und Unklarheiten. Ich werde diese auf meiner homepage

https://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~waldmann/

kontinuierlich klarstellen. Kommentare hierzu sind selbstverständlich sehr willkommen.

Dieses Lehrbuch entstand wie viele andere auch aus einem Skript zu einer Vorlesung, die ich zuerst in Erlangen 2012/2013 gehalten habe. Dort wurde auch die erste Version des Skripts erstellt, wobei ich Benjamin Lotter und Josias Reppekus für die Mithilfe beim Schreiben der LaTeX-Dateien zu großem Dank verpflichtet bin. Weiter möchte ich mich bei meinen Assistenten Bas Janssen, Stéphane Merigon, und Christoph Zellner in Erlangen für das Erstellen der Übungen bedanken. Viele ihrer Übungen haben den Weg in dieses Buch gefunden. Meine Kollegen Peter Fiebig und Karl-Hermann Neeb in Erlangen haben mit vielen Diskussionen meine Sicht auf die lineare Algebra wesentlich beeinflusst. Ihnen gebührt dafür ebenfalls großer Dank. Beim zweiten Durchlauf der Vorlesung 2015/2016, nun in Würzburg, wurden verschiedene Aspekte geringfügig geändert und neue sowie andere Übungen hinzugenommen. Hier halfen mir Marvin Dippell, Chiara Esposito, Stefan Franz, Thorsten Reichert, Jonas Schnitzer, Matthias Schötz, Paul Stapor und Thomas Weber auf tatkräftige Weise. Ihnen allen schulde ich großen Dank, nicht nur für die Mithilfe bei den Übungen sondern auch für die vielen Kommentare und Diskussionen zur Gestaltung der Vorlesung und dieses Buches.

Den meisten Dank schulde ich jedoch meiner Familie: Meine Kinder wie auch meine Frau Viola waren mir die entscheidende moralische Stütze bei diesem Projekt.

Würzburg, Deutschland Stefan Waldmann
Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Elementare Geometrie im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ 1
1.1 Vektoren im Anschauungsraum 1
1.2 Geraden und Ebenen 4
1.3 Abstände und Winkel 10
1.4 Das Kreuzprodukt 16
1.5 Übungen 21

2 Intermezzo 25

3 Von Gruppen, Ringen und Körpern 29
3.1 Algebraische Strukturen und Morphismen 30
3.2 Invertierbarkeit und Gruppen 36
3.3 Ringe und Polynome 44
3.4 Körper und die komplexen Zahlen 52
3.5 Nochmals Polynome 63
3.6 Übungen 68

4 Lineare Gleichungssysteme und Vektorräume 81
4.1 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus 81
4.2 Vektorräume 87
4.3 Untervektorräume 92
4.4 Lineare Unabhängigkeit und Basen 100
4.5 Direkte Summen und Produkte 111
4.6 Übungen 120

5 Lineare Abbildungen und Matrizen 131
5.1 Definition und erste Beispiele 131
5.2 Eigenschaften von linearen Abbildungen 136
5.3 Klassifikation von Vektorräumen 146
5.4 Basisdarstellung und Matrizen 149
5.5 Spezielle Matrizen und Normalformen 160
5.6 Dualraum 172
5.7 Übungen 179

6 Determinanten und Eigenwerte . . . 201
6.1 Die symmetrische Gruppe S_n . . . 201
6.2 Existenz und Eindeutigkeit der Determinante . . . 206
6.3 Eigenschaften der Determinante . . . 218
6.4 Eigenwerte und Diagonalisierung . . . 234
6.5 Das charakteristische Polynom . . . 241
6.6 Das Minimalpolynom und der Spektralsatz . . . 249
6.7 Die Jordan-Normalform . . . 268
6.8 Übungen . . . 277

7 Euklidische und unitäre Vektorräume . . . 293
7.1 Innere Produkte . . . 293
7.2 Skalarprodukte . . . 298
7.3 Norm und Orthogonalität . . . 305
7.4 Orthonormalbasen . . . 315
7.5 Isometrien und Klassifikation . . . 320
7.6 Selbstadjungierte und normale Abbildungen . . . 328
7.7 Der Spektralsatz für normale Abbildungen . . . 339
7.8 Positivität . . . 353
7.9 Die Polarzerlegung und ihre Varianten . . . 366
7.10 Die Operatornorm und die Approximationszahlen . . . 381
7.11 Übungen . . . 393

Anhang A Grundbegriffe der Logik . . . 411
A.1 Aussagen und Junktoren . . . 411
A.2 Beweisstrategien . . . 413
A.3 Quantoren . . . 415
A.4 Vollständige Induktion . . . 416
A.5 Übungen . . . 417

Anhang B Mengen und Abbildungen . . . 419
B.1 Der Begriff der Menge . . . 419
B.2 Operationen mit Mengen . . . 423
B.3 Relationen . . . 427
B.4 Abbildungen . . . 431
B.5 Verkettungen von Abbildungen . . . 436
B.6 Mächtigkeit von Mengen . . . 441
B.7 Übungen . . . 443

Literaturverzeichnis . . . 447

Sachverzeichnis . . . 449

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen und natürliche Zahlen mit Null
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	Körper der rationalen, reellen und komplexen Zahlen
$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$	Vektoren im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $\Vert\vec{a}\Vert$	Euklidisches Skalarprodukt und Norm im $\mathbb{R}^3$
$\vec{a} \times \vec{b}$	Kreuzprodukt im Anschauungsraum
$\diamond$ (auch $\circ$, $\cdot$)	Verknüpfung
$\mathsf{Morph}(M, N)$	Morphismen von M nach N
$\mathsf{End}(M)$	Endomorphismen von M
e, $\mathbb{1}$, 1	Neutrales Element (Einselement)
$M^\times$	Gruppe der invertierbaren Elemente eines Monoids M
$(G, \cdot, 1)$	Multiplikativ geschriebene Gruppe
$(G, +, 0)$	Additiv geschriebene (abelsche) Gruppe
$\mathsf{Bij}(M)$	Gruppe der Bijektionen von M
$\mathsf{Aut}(M)$	Gruppe der Automorphismen von M
$\boldsymbol{n}$	Menge der ersten n natürlichen Zahlen
$S_n = \mathsf{Bij}(\boldsymbol{n})$	Permutationsgruppe (symmetrische Gruppe)
$\mathbb{Z}_p$	Zyklische Gruppe der Ordnung p
$\ker\phi$, $\operatorname{im}\phi$	Kern und Bild von ϕ
$\mathsf{R}[x]$	Polynomring mit Koeffizienten in Ring R
$\deg(p)$	Grad eines Polynoms p
$\operatorname{char}(\mathbb{k})$	Charakteristik eines Körpers $\mathbb{k}$
$\mathsf{Re}(z)$, $\mathsf{Im}(z)$	Real- und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$
$\bar{z}$, $\lvert z\rvert$	Komplexe Konjugation und Betrag von $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{S}^1$	Einheitskreis in $\mathbb{C}$
$\mathsf{R}[[x]]$	Formale Potenzreihen mit Koeffizienten in R
$\mathsf{Lös}(A, b)$	Lösungsmenge von linearem Gleichungssystem
$\mathbb{k}^n$	Vektorraum der Spaltenvektoren der Länge n
δ_{ab}	Kronecker-Symbol
ℓ^∞	Vektorraum der beschränkten Folgen
c, $c_\circ$	Vektorraum der konvergenten Folgen, Nullfolgen

$\mathsf{Abb}_0(M, \Bbbk)$	Abbildungen mit endlichem Träger
$\operatorname{span} W$	Spann der Teilmenge W
$\sum_{i \in I} U_i$	Summe der Unterräume $\{U_i\}_{i \in I}$
$\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n \in \Bbbk^n$	Standardbasis von $\Bbbk^n$
v_b	Koordinaten von v bezüglich $b \in B$
$\dim V$	Dimension des Vektorraums V
$\prod_{i \in I} V_i$	Kartesisches Produkt von Vektorräumen
$\bigoplus_{i \in I} V_i$	Direkte Summe von Vektorräumen
$\Bbbk^B$	Kartesisches Produkt von B Kopien von $\Bbbk$
$\Bbbk^{(B)}$	Direkte Summe von B Kopien von $\Bbbk$
$\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$	Stetige Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$
$V_{\mathbb{C}}$	Komplexifizierter Vektorraum zu reellem V
$\mathsf{Hom}(V, W)$	Lineare Abbildungen (Homomorphismen) von V nach W
$\operatorname{rank} \Phi$	Rang der linearen Abbildung Φ
$V \cong W$	Isomorphie von Vektorräumen
${}_B[v] \in \Bbbk^{(B)}$	Koordinaten von v bezüglich einer Basis B
${}_B[\Phi]_A$	Matrix der linearen Abbildung Φ bezüglich der Basen A und B
$\Bbbk^{(B) \times A}$	$B \times A$-Matrizen mit Endlichkeitsbedingung
$\mathbb{1}_{A \times A}$	$A \times A$-Einheitsmatrix
$\mathrm{M}_{n \times m}(\Bbbk)$, $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$	$n \times m$-Matrizen, $n \times n$-Matrizen über $\Bbbk$
$\mathbb{1}_n$ (oft nur $\mathbb{1}$)	$n \times n$-Einheitsmatrix
$\mathrm{GL}_n(\Bbbk) = \mathrm{M}_n(\Bbbk)^\times$	Allgemeine lineare Gruppe
$\mathrm{GL}(V) = \mathsf{End}(V)^\times$	Allgemeine lineare Gruppe eines Vektorraums V
E_{ij}	(i, j)-Elementarmatrix
$V_{ii'}$, $R_{i,\lambda}$, S_{ij}	Matrizen der elementaren Umformungen
A^{T}	Transponierte Matrix zu A
$A \sim B$	Äquivalenz von Matrizen
$V^* = \mathsf{Hom}(V, \Bbbk)$	Dualraum von V
$b^* \in V^*$	Koordinatenfunktional zum Basisvektor $b \in B \subseteq V$.
Φ^*	Duale Abbildung zu Φ
$\iota \colon V \longrightarrow V^{**}$	Kanonische Einbettung in den Doppeldualraum
$[A, B] = AB - BA$	Kommutator von A und B
$\ell(\sigma)$, $\operatorname{sign}(\sigma)$	Länge und Signum der Permutation σ
τ_{ij}	Transposition $i \leftrightarrow j$
$\det(A) = \det(a_1, \ldots, a_n)$	Determinante von $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$
$\mathrm{SL}_n(\Bbbk)$	Spezielle lineare Gruppe
$A^\#$	Komplementäre Matrix zu A
$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$	Vandermonde-Matrix
$A \approx B$	Ähnlichkeit von Matrizen
$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$	Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
V_λ	Eigenraum zum Eigenwert λ
$\chi_A(x) = \det(A - x\mathbb{1})$	Charakteristisches Polynom von A
$\mathsf{tr}(A)$	Spur von A
$P_1 + \cdots + P_k = \mathbb{1}$	Zerlegung der Eins

m_A	Minimalpolynom von A
$\tilde{V}_\lambda$	Verallgemeinerter Eigenraum zum Eigenwert λ
$A = A_S + A_N$	Jordan-Zerlegung in halbeinfachen und nilpotenten Teil
$\mathrm{spec}(A)$	Spektrum von A
J_n	$n \times n$-Jordan-Matrix
$\mathbb{K}$	Alternativ $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Inneres Produkt, Skalarprodukt
$^\flat \colon V \longrightarrow V^*$	Musikalischer Homomorphismus bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$\mathsf{Bil}(V)$	Bilinearformen auf V
$[\langle \cdot, \cdot \rangle]_{B,B}$	Matrix der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich einer Basis B
$\lVert \cdot \rVert$	Norm
$U^\perp$	Orthogonalkomplement der Teilmenge $U \subseteq V$
$v = v_\parallel + v_\perp$	Orthogonale Zerlegung von v
P_U	Orthogonalprojektor auf U
$\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$	Orthogonale und unitäre Gruppe
$\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$	Spezielle orthogonale und spezielle unitäre Gruppe
A^*	Adjungierte Abbildung von A
$\sharp$	Inverses des musikalischen Isomorphismus $^\flat$
$\sqrt{A}$	Positive Wurzel von positivem A
E_v	Erwartungswert im Zustand v
$\lvert A \rvert$, A_+, A_-	Absolutbetrag, Positivteil und Negativteil von A
$s_k(A)$	k-ter Singulärwert von A
$\lVert A \rVert$, $\lVert A \rVert_2$	Operatornorm und Hilbert-Schmidt-Norm von A
$a_k(A)$	k-te Approximationszahl von A
$A \leq B$	Partielle Ordnung selbstadjungierter Abbildungen
$\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$	Logische Negation, logisches Und, logisches Oder
$p \vert q$	Schefferscher Strich (logisches Nicht-Und)
$\forall$, $\exists$	Quantoren „für alle“ und „es existiert“
$\cup$, $\cap$, $\setminus$	Vereinigung, Durchschnitt und Komplement
$M \times N$	Kartesisches Produkt der Mengen M und N
$\mathsf{Abb}(M, N)$	Abbildungen von M nach N
2^M	Potenzmenge der Menge M
$\mathrm{graph}(f)$	Graph der Abbildung f
$f \circ g$	Verkettung der Abbildungen f und g
$f^{-1}(U)$	Urbild der Teilmenge U
$\prod_{i \in I} M_i$	Kartesisches Produkt der Mengen $\{M_i\}_{i \in I}$
$\mathrm{pr}_i \colon \prod_{j \in I} M_j \longrightarrow M_i$	Projektion auf i-te Komponente
$\#M$	Mächtigkeit der Menge M

Elementare Geometrie im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$

1

In diesem ersten Kapitel wollen wir an das Schulwissen zur linearen Algebra und elementaren Geometrie anknüpfen und unsere unmittelbare Anschauung dazu verwenden, einige erste mathematische Definitionen zu Vektoren, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ zu motivieren. Dieses Kapitel wird daher weitgehend als Heuristik zu verstehen sein – einen systematischeren und vor allem mathematisch exakteren Zugang zu den verschiedenen Begriffen der linearen Algebra werden wir uns in den folgenden Kapiteln erarbeiten müssen.

Dieses Kapitel dient weiterhin auch dazu, sich mit den verschiedenen, in der linearen Algebra und auch darüber hinaus in der Mathematik üblichen Schreib- und Sprechweisen vertraut zu machen. Insbesondere wird konsequent bereits hier von einer mengentheoretischen Schreibweise Gebrauch gemacht. Wer hiermit nicht vertraut ist, findet die nötigen Details in Anhang B.

1.1 Vektoren im Anschauungsraum

Um einen Punkt p im Raum festzulegen, benötigen wir zunächst einen fest gewählten, aber ansonsten willkürlichen Ursprungspunkt, den wir mit 0 bezeichnen. Weiter müssen wir drei Richtungen, die Koordinatenrichtungen, auszeichnen. Vom Punkt 0 aus benötigen wir dann drei Zahlen, die Koordinaten (x, y, z) des Punktes p, um von 0 eindeutig zu p zu finden. Dazu bewegt man sich zunächst x Einheiten in Richtung der ersten Koordinatenachse, dann y Einheiten in Richtung der zweiten und schließlich z Einheiten in Richtung der dritten Koordinatenachse. Wir können daher die Punkte im Anschauungsraum mit den Tripeln (x, y, z) von reellen Zahlen identifizieren. Der Ursprung 0 besitzt somit die Koordinaten $(0, 0, 0)$. Die Menge aller solcher Zahlentripel bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^3$. Oft werden diese Tripel auch in Spaltenform geschrieben und *Vektoren* im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ genannt, siehe auch Abb. 1.1. Weiter ist auch die Schreibweise $\vec{p}$ anstelle von p üblich, insbesondere eben für Vektoren im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben daher auch

S. Waldmann, *Lineare Algebra 1*, DOI 10.1007/978-3-662-49914-6_1

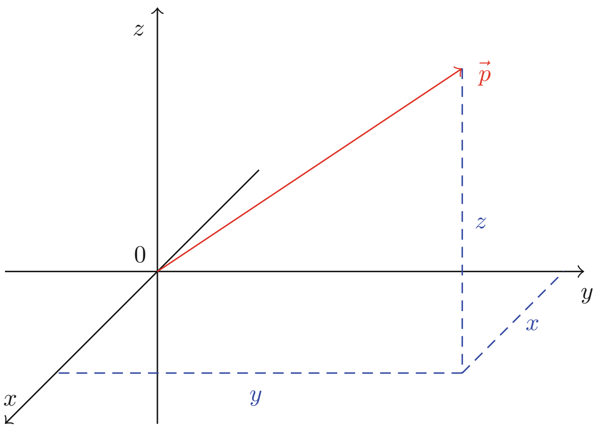

Abb. 1.1 Vektor $\vec{p}$ mit den Koordinaten (x, y, z) im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Letzteres stellt offenbar eine geschicktere Notation dar, sobald wir mehrere Vektoren mit ihren Komponenten bezeichnen wollen. Oft werden in der Mathematik sehr verschiedene Bezeichnungen und Schreibweisen verwendet. Es ist daher wichtig, sich früh daran zu gewöhnen und flexibel zwischen verschiedenen Traditionen wechseln zu können. Wir werden dies noch an vielen weiteren Stellen sehen.

Es gibt nun verschiedene einfache Operationen, wie wir aus bereits gegebenen Vektoren neue erhalten können. Zunächst können wir einen Vektor $\vec{p}$ strecken und stauchen, indem wir ihn mit einem Skalenfaktor $\lambda \in \mathbb{R}$ skalieren, siehe auch Abb. 1.2. Die neuen Koordinaten des mit λ skalierten Vektors sind dann λp_1, λp_2 und λp_3, weshalb wir diesen Vektor auch mit $\lambda \cdot \vec{p}$ bezeichnen werden.

Ebenfalls kann man einen Vektor $\vec{p}$ an einen anderen Vektor $\vec{q}$ anheften, also zunächst vom Ursprung nach $\vec{q}$ gehen und anschließend noch um $\vec{p}$ weitergehen, siehe Abb. 1.3. Eine elementare Überlegung zeigt, dass der resultierende Punkt die Koordinaten $p_1 + q_1$, $p_2 + q_2$ und $p_3 + q_3$ besitzt. Wir bezeichnen diesen Punkt daher mit $\vec{p} + \vec{q}$.

Diese beiden Konstruktionen erfüllen nun einige einfache Rechenregeln, die wir hier zusammentragen wollen.

Proposition 1.1. *Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$.*

i.) Es gilt $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{p}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{p}$.
ii.) Es gilt $(\lambda + \mu) \cdot \vec{p} = \lambda \cdot \vec{p} + \mu \cdot \vec{p}$.
iii.) Es gilt $\lambda \cdot (\vec{p} + \vec{q}) = \lambda \cdot \vec{p} + \lambda \cdot \vec{q}$.